1. Obtenga el polinomio de Taylor $T_n f(x)$ que se indica. En cada caso, se entiende que los valores de x hacen que $f(x)$ esté bien definida.

   (a) $T_n(b^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(b))^k}{k!} x^k$

   (b) $T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

   (c) $T_{2n+1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$

   (d) $T_{2n}\left(\cos^2(x)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

   (e) $T_n\left(\frac{1}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}$

   (f) $T_n\left(\frac{1}{(1-x)(2-x)}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - 1\right) x^k$

2. En cada caso, se entiende que los valores de x hacen que $f(x)$ esté bien definida. Muestre que el resto de Lagrange asociado a cada una de las funciones dadas, satisface la desigualdad.

   (a) Si $\operatorname{sen}(x) = T_{2n}(x) + R_{2n}(x)$, entonces $|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (b) Si $\cos(x) = T_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$, entonces $|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

   (c) Si $\arctan(x) = T_{2n}(x) + R_{2n}(x)$, entonces $|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)}$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (d) Si $e^x = T_n(x) + R_n(x)$, entonces $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, para $-1 \leq x \leq 0$.

3. Aproxime las siguientes funciones con $T_n(x)$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Maclaurin de grado n.

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x^5},\ n = 25$

   (b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3),\ n = 15$

4. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

   (a) Calcule los polinomios de orden 3 y 4 centrados en $x = \frac{\pi}{3}$ y sus respectivos restos de Lagrange.

   (b) Muestre que $T_3(x) - T_4(x) = 0$.

   (c) Aproxime $\operatorname{sen}(2°)$ usando ambos polinomios. ¿Cuál de ellas da mayor información sobre el exactitud que la aproximación? Además, determine una cota para el error que se comete en cada caso. Sugerencia: Recuerde que $2° = \frac{\pi}{90}$.

   (d) En la aproximación anterior, hallar el grado mínimo del polinomio de Taylor centrado en $x = \pi/3$, para que el error sea menor a 0.5×10^{-12}.

5. Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{5}{4}x^2$.

(a) Muestre que aplicando el teorema de Taylor se obtiene

$$f(x) \approx \frac{-5}{4} - 2\,(x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{6}\,(x-1)^3\,.$$

(b) Muestre que $|R_3\,(x)| \leq \frac{2}{27}\,(x-1)^4$ para $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$.

6. Hallar el grado mínimo del polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ generado por $f(x) = \ln x$, que debe usarse para aproximar el valor de $\ln\,(1.2)$ con un error menor a 0.5×10^{-5}.

7. Considere la función $f\,(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

(a) Calcule el polinomio de Taylor generado por $f(x)$, alrededor de $\dfrac{\pi}{6}$ de grado 4, y su respectivo resto de Lagrange.

(b) Use el polinomio de la parte (a) para aproximar el valor $\cos\,(3°)$.

(c) Determine una cota del error para la aproximación.

(d) ¿ Cuántos decimales garantiza esta aproximacion?

8. Considere la función $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$.

(a) Muestre que $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \approx \frac{1}{4}(2 - 2\sqrt{3}x - x^2)$ es el polinomio de Maclaurin.

(b) Calcule la forma aproximada del valor de $\cos(58°)$.

(c) Muestre que el error cometido en la parte (b) es menor que $\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3$.

9. Utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 5 generado para la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, aproxime el valor de $\sqrt[3]{28}$. Determine una cota para el error de la aproximación. Sugerencia: $\sqrt[3]{28} = 3\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{27}}$.

10. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin generado por $f(x)$ de grado 3 y su respectivo resto de Lagrange.

(b) Utilice $T_3(x)$ para obtener a $r = \sqrt{15} - 3$ como aproximación de la raíz no nula de la ecuación $x^2 = \operatorname{sen} x$.

(c) Calcule $T_4(x)$ y $R_4(x)$. ¿Por qué se puede usar $R_4(x)$ en lugar de $R_3(x)$ en la parte (c)? Explique.

11. En cada caso haga lo que se le solicita.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin de grado 1 generado por $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y su respectivo resto de Lagrange.

(b) Utilice la parte (a) para calcular el polinomio de Maclaurin de grado 2 generado por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y su respectivo resto.

(c) Usando la parte (b) calcule el polinomio de Maclaurin grado 3 generado por $f(x) = \arctan x$.

(d) Utilice (c) para obtener $r = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ como aproximación de la raíz no nula de la ecuación $x^2 = \arctan x$.

12. Considere la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin generado por $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ de grado 3 y su respectivo resto de Lagrange.

(b) Determine el polinomio de Maclaurin generado por $g(-x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ de grado 6 utilizando la propiedad de composición.

(c) Utilice (c) para calcular el polinomio de Maclaurin generado por la función $f(x)$ de grado 7.

(d) Use el polinomio anterior para aproximar el valor de π. Sugerencia evaluar en $x = \frac{1}{2}$.

(e) ¿Cuántos decimales exactos nos da la aproximación anterior?

13. Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(a) Muestre que $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(b) Calcule el polinomio de Maclaurin de grado 2 generado por $f'(x)$. Sugerencia: trabaje con la función $g(x) = \frac{1}{1+x}$ y utilice la propiedad de composición.

(c) Calcule el polinomio de Maclaurin de grado 3 generado por $f(x)$ y úselo para aproximar $\ln\sqrt{1.2}$.

(d) ¿Cuántas cifras de exactitud tiene la aproximación?

14. Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin grado 6 generado por la función $f(x)$.

(b) Utilice el polinomio de la parte (a) para aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

15. Utilice la igualdad $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$ para calcular lo que se le pide.

(a) ¿Por qué se puede utilizar $R_4(x)$ en lugar de $R_3(x)$?

(b) Muestre que usando la aproximación anterior $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\left(x^2\right)\, dx \approx \dfrac{55\sqrt{2}}{672}$

(c) Muestre que el error de aproximar la integral cumple que $|\, R_4(x)\, | \leq \dfrac{\sqrt{2}}{84480}$

16. Aproxime el valor de la intregral $\int_1^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln x}{x-1}\, dx$ utilizando un polinomio de Taylor de la función $f(x) = \ln x$ centrado en $x = 1$ de grado 5. Muestre que el error de calcular la integral es $|\, R\, | \leq \frac{1}{2304}$ ¿Cuántos decimales exactos garantiza la cota del error? Justifique su respuesta.

17. Considere la función $f(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin generado por $f(x)$ de grado 8 y escriba su respectivo resto.

(b) Use el polinomio de la parte (a) para aproximar el valor de $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{1+x^4} dx$

18. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^5}}$.

(a) Calcule el polinomio de Maclaurin generado por $f(x)$ de grado 15 y escriba su respectivo resto.

(b) Use el polinomio de la parte (a) para aproximar el valor de $\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\, dx$.

(c) Muestre que el error de la aproximación de la integral cumple con la desigualdad $R \leq 1.03 \times 10^{-9}$.

(d) ¿Cuántos decimales garantiza esta aproximación?

19. Considere la función $f(x) = e^{-x^2}$

(a) Escriba el polinomio de Taylor de orden 6, $T_6(x)$ alrededor de $x = 0$ de la función $f(x)$.

(b) Utilice la parte (a) para calcular la forma aproximada de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Si se sabe que $|f^{(7)}(Z)| \leq 410$ para $Z \in [0, 1]$, estime una cota del error cometido en la integración.

(c) ¿Cuántos decimales exactos garantiza la aproximación de la integral?